Μαθημα 24ο 15/1/2018

Διαφ. Γεωμ.

Ασκηση 1

Να βρεθουν οι γραμμες καμπυλοτητας της επιφανειας

$X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$, $a \neq 0$

Λυση

$X_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $X_v = (-u\sin v, u\cos v, a)$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix} = (a\sin v, -a\cos v, u) \neq (0,0,0)$$

$\|X_u \times X_v\| = a^2 + u^2 > 0$ αρα η X ειναι κανονική παραμετρική επιφανεια

Η κανονική καμπυλη $c(t) = X(u(t), v(t))$ ειναι γραμμη καμπυλοτητας

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} v'^2 & -u'v' & u'^2 \\ E(u(t),v(t)) & F(\ ) & G(\ ) \\ e(\ ) & f(\ ) & g(\ ) \end{vmatrix} = 0 \quad (*)$$

Υπολογισμος πρωτης θεμ. μορφης

$E = \|X_u\|^2 = 1$, $F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$, $G = \|X_v\|^2 = u^2 + a^2$

Υπολογισμος δευτερης θεμ. μορφης.

$e = \langle X_{uu}, N \rangle$, $f = \langle X_{uv}, N \rangle$, $g = \langle X_{vv}, N \rangle$

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}(a\sin v, -a\cos v, u)$$

$X_{uu} = 0$, $X_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$, $X_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$

$e=0, \quad f=\dfrac{-a}{\sqrt{a^2+u^2}}, \quad g=0$

άρα η $(*) \iff \begin{vmatrix} v'^2 & -u'v' & u'^2 \\ 1 & 0 & u^2+a^2 \\ 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{a^2+u^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff$

$\begin{vmatrix} v'^2 & u'^2 \\ 1 & u^2+a^2 \end{vmatrix} = 0 \iff (u^2+a^2)v'^2 = u'^2 \iff \sqrt{u^2+a^2}\,.\, v' = \pm u' \iff$

$\pm\int v' = \int \dfrac{u'}{\sqrt{a^2+u^2}}\, dt + c \iff \pm v = \int \dfrac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} + c$ → είναι γνωστό από την ανάλυση

ασυμπτωτικές καμπύλες = παραμετρικές γιατί $e=g=0$

→ Οι παραμετρικές καμπύλες είναι ασυμπτωτικές καμπύλες διότι $e=g=0$
Είναι ευθειογενής; Είναι αναπτυκτή;

$X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$

Οι παραμ. καμπύλες $X(u=u_0, v)$ (σταθ.) είναι κυλινδρική έλικα.

Οι παραμ. καμπύλες $X(u, v=v_0) = (0,0,av_0) + u(\cos v_0, \sin v_0, 0)$ (σταθ.) είναι ευθεία.

⇒ η επιφάνεια είναι ευθειογενής

$N = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}(a\sin v, -a\cos v, u)$ δεν είναι ανεξ. της u ⇒

Δεν είναι αναπτυκτή

Άλλος τρόπος

Καμπυλότητα Gauss: $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} < 0$ άρα $f \neq 0$ οπότε όχι αναπτυκτή

→ Υπάρχουν ομφαλικά σημεία

$$\left.\begin{array}{l} \frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} \neq 0 \\ F = 0 = f \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Δεν υπάρχουν}$$

$II(X_u) = 0 \Leftrightarrow X_u$ ομφαλικό

Άσκηση 2

Δίνεται επιφανειακή κανονική καμπύλη $c: I \to S$ κανονική επιφάνεια S με παντού θετική καμπυλότητα. Αν η c είναι γραμμή καμπυλότητας και ασυμπτωτική να δειχθεί ότι είναι επίπεδη και ότι το επίπεδο της εφάπτεται της S.

Λύση

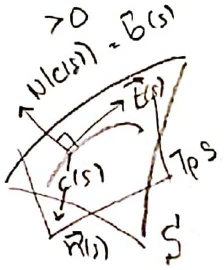
Υποθέτω ότι η c έχει παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$. Από το Θεώρημα Rodrigues γνωρίζω ότι $(N\circ c)^{\cdot}(s) = \lambda(s)\,\dot c(s)$ για κατάλληλη συνάρτηση $\lambda(s)$.
Επειδή η c είναι ασυμπτωτική καμπύλη έχω

$$II_{c(s)}(\dot c(s)) = 0 \Leftrightarrow \langle L_{c(s)}\dot c(s), \dot c(s)\rangle = 0 \Leftrightarrow -\langle dN_{c(s)}(\dot c(s)), \dot c(s)\rangle = 0$$

$$\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} \langle (N\circ c)^{\cdot}(s), \dot c(s)\rangle = 0 \Leftrightarrow (\langle \overset{0}{\cancel{(N\circ c)(s), \dot c(s)}}\rangle)^{\cdot} - \langle (N\circ c(s)), \ddot c(s)\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle N\circ c(s), \ddot c(s)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle N\circ c(s), \dot{\vec t}(s)\rangle = 0 \xLeftrightarrow{\dot{\vec t} = \kappa \vec n} \langle N\circ c(s), \kappa(s)\,\vec n(s)\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\kappa(s)}_{>0}\langle N\circ c(s), \vec n(s)\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec n(s) \in T_{c(s)}S$$



$$\Rightarrow \vec b(s) = \vec t(s) \times \vec n(s) \Rightarrow \boxed{\vec b(s) = \pm N(c(s))}$$

Αρα εχουμε $\vec{B}(s) = \pm N(c(s)) = \pm N \circ c(s)$

για συνεχης συν. με ακεραιες τιμες θα εχει τιμες ±1 συμφωνα με γνωστο θεωρημα

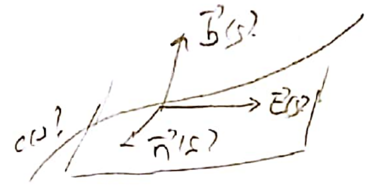
$$\dot{\vec{b}}(s) = \pm (N \circ c)^{\cdot}(s) \xRightarrow{\dot{\vec{b}} = -\tau \vec{n}} -\tau(s)\vec{n}(s) = \pm \lambda(s)\vec{t}(s) \Rightarrow \tau(s) = 0$$

⇒ Η c ειναι επιπεδη απο γνωστο θεωρημα.

$$\tau(s) = \pm \frac{\vec{t}(s)}{\vec{n}(s)} \lambda(s).$$

$\vec{t}(s), \vec{n}(s)$ γρ. ανεξ. αρα $\tau(s) = 0$

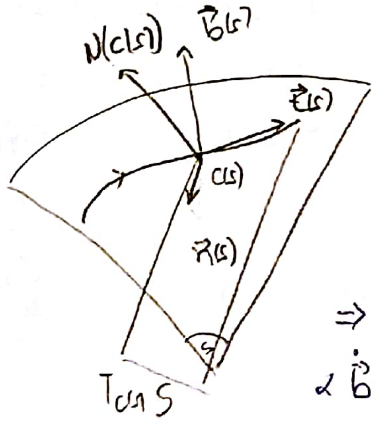
Εφοσον $\vec{b}(s) = \pm N c(s)$ αρα το επιπεδο της καμπυλης ειναι το εφαπτομενο επιπεδο της επιφανειας



Ασκηση 3

$C: I \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπυλη με παντου θετικη καμπυλοτητα. Το επιπεδο που διερχεται απο το σημειο $c(s)$ και ειναι παραλληλο προς τα $\vec{t}(s), \vec{n}(s)$ καλειται επιπεδο προσκολλησεως της C στο σημειο της $c(s)$ } ορισμος

Εστω $C: I \to S$ γραμμη καμπυλοτητας κανονικης επιφανειας S με παντου θετική καμπυλοτητα. Αν το επιπεδο προσκολλησεως της C δεν εφαπτεται πουθενα στην S και σχηματιζει σταθερη γωνια με το εφαπτομενο επιπεδο της S, να δειχθει οτι η C ειναι επιπεδη



Το $\vec{b}(s)$ ειναι καθετο στο επιπεδο προσκολ.

το $N(c(s))$ ειναι καθετο στο $T_{c(s)}S$

$$\measuredangle(\vec{b}(s), N\circ c(s)) = \text{σταθ} \overset{\cos}{\Leftrightarrow} \cos\measuredangle(\vec{b}(s), N\circ c(s)) = \text{σταθ}.$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{b}(s), N\circ c(s) \rangle = \text{σταθ}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{b}(s), N\circ c(s) \rangle^{\cdot} = 0 \Rightarrow$$

$$\langle \dot{\vec{b}}(s), N\circ c(s) \rangle + \langle \vec{b}(s), (N\circ c)^{\cdot}(s) \rangle = 0 \quad \overset{\dot{\vec{b}} = -\tau\vec{n}}{\Rightarrow}$$

$$\langle -\tau(s)\vec{n}(s), N\circ c(s) \rangle + \langle \vec{b}(s), \cancel{\lambda(s)\vec{t}(s)} \rangle = 0 \Rightarrow$$

→ 0 εφοσον βαση απο πλαισιο frenet

$$-\tau(s)\langle \vec{n}(s), N\circ c(s) \rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

Αν $\langle \vec{n}(s_0), N_0c(s_0)\rangle = 0$ για καποιο $s_0 \in I$

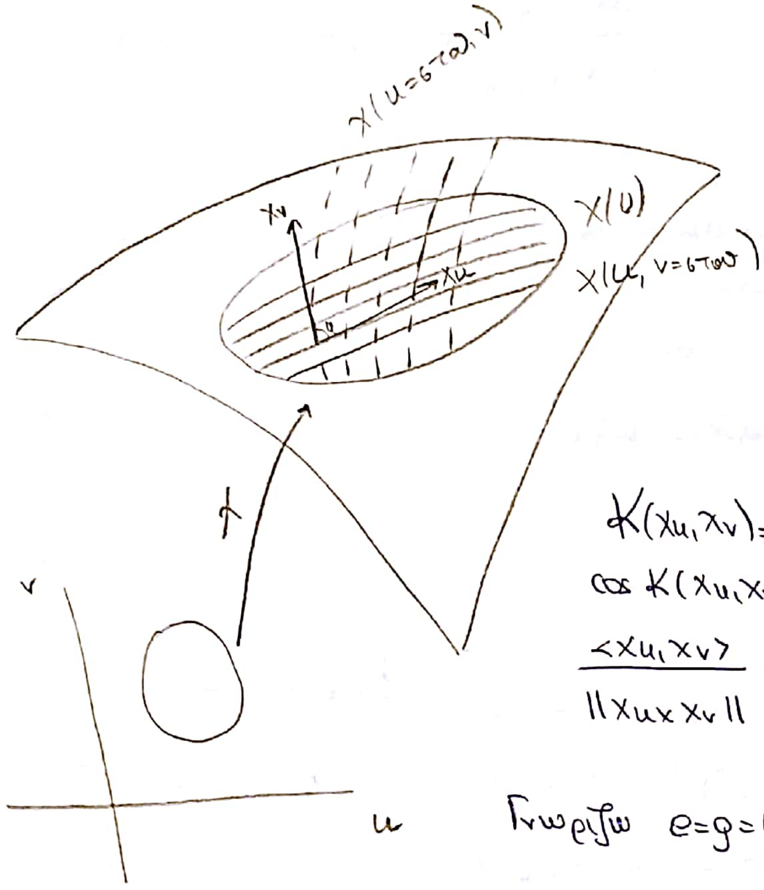
$\Rightarrow \vec{n}(s_0) \in T_{c(s_0)}S \Rightarrow T_{c(s_0)}S =$ επιπεδο προσκολ. στο $c(s_0)$ οποτε

Αρα $\tau(s) = 0$ δηλ. η c επιπεδη

Ασκηση 4

Δινεται κανονική επιφανεια S και $X(u,v)$ είναι δικτυο ασυμπτωτικων καμπυλων (δηλ συστημα συντετ. των οποιων οι παραμετρικες καμπυλες ειναι ασυμπτωτικες καμπυλες). Αν οι παραμετρικες καμπυλες τεμνονται υπο σταθερη γωνια και $K \neq 0$ δειξτε $\frac{H^2}{K} =$ σταθ

Λυση



$\measuredangle(X_u, X_v) = \varphi =$ σταθ $\Rightarrow$

$\cos \measuredangle(X_u, X_v) = \cos\varphi =$ σταθ $\Leftrightarrow$

$\frac{\langle X_u, X_v\rangle}{\|X_u \times X_v\|} = \cos\varphi \Leftrightarrow \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}} = \cos\varphi =$ σταθ

Γνωριζω $e = g = 0$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \Rightarrow K = -\frac{f^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = -\frac{fF}{EG - F^2}$$

$$\frac{H^2}{\kappa}=\frac{\dfrac{f^2F^2}{(EG-F^2)^2}}{-\dfrac{f^2}{EG-F^2}}=-\frac{\cancel{f^2}F^2(\cancel{EG-F^2})}{\cancel{f^2}(EG-F^2)^{\cancel{2}}}=-\frac{F^2}{EG-F^2}$$

Δεν έχω θέμα $f=0$ γιατί γνωρίζω $\kappa\neq 0$

Οπότε έχω $\dfrac{H^2}{\kappa}=-\dfrac{F^2}{EG-F^2}$ (1)

Επίσης $\dfrac{F^2}{EG}=\cos^2\varphi \Rightarrow F^2=EG\cos^2\varphi$ (2)

$$(1)\overset{(2)}{\Longleftrightarrow}\ \frac{H^2}{\kappa}=-\frac{EG\cos^2\varphi}{EG-EG\cos^2\varphi}=-\frac{\cancel{EG}\cos^2\varphi}{\cancel{EG}(1-\cos^2\varphi)}=-\tan^2\varphi \text{ άρα σταθ.}$$

Άσκηση 5

Έστω $c: I\to\mathbb{R}^3$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $s\in I$ και παντού θετική καμπυλότητα. Δείξτε ότι αν ισχύει

$$[\ddot{c}(s),\ \dddot{c}(s),\ \ddddot{c}(s)]=0 \quad \forall s$$

Τότε η c είναι καμπύλη σταθερής κλίσης.

$\ddot{c}=\dot{\vec{t}} \Rightarrow \ddot{c}=\kappa\vec{n}$

$\dddot{c}=\dot{\kappa}\vec{n}+\kappa\dot{\vec{n}}=\dot{\kappa}\vec{n}+\kappa(-\kappa\vec{t}+\tau\vec{b})$

$\dddot{c}=-\kappa^2\vec{t}+\dot{\kappa}\vec{n}+\kappa\tau\vec{b}$

$\ddddot{c}=-2\kappa\dot{\kappa}\vec{t}-\kappa^2\dot{\vec{t}}+\ddot{\kappa}\vec{n}+\dot{\kappa}\dot{\vec{n}}+(\kappa\tau)^{\cdot}\vec{b}+\kappa\tau\dot{\vec{b}}=-2\kappa\dot{\kappa}\vec{t}-\kappa^3\vec{n}+$
$+\ddot{\kappa}\vec{n}+\dot{\kappa}(-\kappa\vec{t}+\tau\vec{b})+(\kappa\tau)^{\cdot}\vec{b}-\kappa\tau^2\vec{n} \Rightarrow$

$\ddddot{c}=-3\kappa\dot{\kappa}\vec{t}+(\ddot{\kappa}-\kappa^3-\kappa\tau^2)\vec{n}+(2\dot{\kappa}\tau+\kappa\dot{\tau})\vec{b}$

$$[\ddot{c},\ \dddot{c},\ \ddddot{c}]=\begin{vmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa^2 & \dot{\kappa} & \kappa\tau\\ -3\kappa\dot{\kappa} & \ddot{\kappa}-\kappa^3-\kappa\tau^2 & 2\dot{\kappa}\tau+\kappa\dot{\tau}\end{vmatrix}=0$$

$$\iff -\kappa \begin{vmatrix} -\kappa^2 & \kappa\tau \\ -3\kappa\dot{\kappa} & 2\dot{\kappa}\tau+\kappa\dot{\tau} \end{vmatrix} = 0 \iff -\kappa \begin{vmatrix} \kappa & -\tau \\ -3\kappa\dot{\kappa} & 2\dot{\kappa}\tau+\kappa\dot{\tau} \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 2\cancel{\kappa}\dot{\kappa}\tau + \kappa^2\dot{\tau} - 3\cancel{\kappa}\dot{\kappa}\tau = 0 \iff 2\dot{\kappa}\tau - \dot{\kappa}\tau = 0 \iff \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{\tau}\kappa - \dot{\kappa}\tau}{\kappa^2}$$

$\iff \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\cdot} = 0 \iff \frac{\tau}{\kappa} = \text{σταθ} \iff$ η c είναι σταθ. κλίσης.